



基于 Lotka-Volterra 动力学、改进 Cobb-Douglas 函数与随机动态规划的农业生态系统多维演化与空间异质性控制研究

赵 亮, 徐温富, 张彬蕾*

(喀什大学电子与通信工程学院, 新疆 喀什 844000)

摘要: 针对自然森林向集约化农业转化引发的生态系统失衡问题, 本文构建了耦合微观种群生态学、宏观生产经济学与空间计量经济学的多维数学分析框架。首先, 建立含化学强迫项的扩展 Lotka-Volterra 非线性微分方程组, 刻画物种演替轨迹并论证化学干预对雅可比矩阵稳定性的破坏机制; 其次, 引入蝙蝠与瓢虫等次级消费者重构食物网拓扑, 通过 Lyapunov 方法分析系统全局渐近稳定性; 再次, 将内生生态资本的改进 Cobb-Douglas 函数嵌入 Bellman 随机动态规划框架推导有机转型最优控制律; 最后, 引入地理加权回归 (GWR) 量化农业产量与生态因子的空间异质性。结果表明, 生物多样性恢复与长期经济收益存在正向协同关系, 为现代农业可持续转型提供了数理依据。

关键词: 农业生态系统; Lotka-Volterra 动力学; 随机动态规划; Cobb-Douglas 生产函数; 地理加权回归; 空间异质性; 多目标优化

收稿日期: 2026 年 3 月 6 日

中图分类号: 029

通讯作者: 张彬蕾, 喀什大学电子与通信工程学院

Research on Multidimensional Evolution and Spatial Heterogeneity Control of Agricultural Ecosystems Based on Lotka-Volterra Dynamics, Improved Cobb-Douglas Function, and Stochastic Dynamic Programming

Zhao Liang, Xu Wenfu, Zhang Binlei*

(College of electronic and communication engineering, Kashgar University, Kashgar, Xinjiang 844000)

Abstract: Aiming at the problem of ecosystem imbalance caused by the transformation from natural forest to intensive agriculture, this paper constructs a multi-dimensional mathematical analysis framework coupling micro population ecology, macro production economics and spatial econometrics. Firstly, the extended Lotka Volterra nonlinear differential equations with chemical forcing term are established to describe the species succession trajectory and demonstrate the destruction mechanism of chemical intervention on the stability of Jacobian matrix; Secondly, secondary consumers such as bats and ladybugs are introduced to reconstruct the food web topology, and the global asymptotic stability of the system is analyzed by Lyapunov method; Thirdly, the improved Cobb Douglas function of endogenous ecological capital is embedded into Bellman stochastic dynamic programming framework



to derive the optimal control law of organic transformation; Finally, geographic weighted regression (GWR) was introduced to quantify the spatial heterogeneity of agricultural yield and ecological factors. The results showed that there was a positive synergistic relationship between Biodiversity Restoration and long-term economic benefits, which provided a mathematical basis for the sustainable transformation of modern agriculture.

Key words: Agricultural ecosystem; Lotka Volterra dynamics; Stochastic dynamic programming; Cobb Douglas production function; Geographically weighted regression; Spatial heterogeneity; Multi objective optimization

0 引言

土地覆被的剧烈更迭是当代面临的重要行星边界挑战之一。原始森林等自然生态系统正以空前速度被转化为单一作物主导的农业耕地，不仅压缩了原生动植物的生存边界，更切断了自然食物链的能量流动与物质循环^[1]。在新生农业系统演化初期，由于自然天敌缺失与微气候剧变，农业生产者普遍采取大量除草剂与杀虫剂等外源化学干预策略^[2]。然而，高强度化学干预虽暂时压制了有害种群，却使系统陷入高度依赖外部能量注入的脆弱稳态。

传统的农业资源配置评估多采用静态线性规划

或基于普通最小二乘法 (OLS) 的全局回归分析，在处理高度非线性的多营养级物种互动与跨周期决策时存在显著局限^[3]。全局 OLS 模型忽略了农业生态过程固有的空间非平稳性，导致参数估计有偏^[4]。现代理论表明，农业生态系统的演化本质上是嵌套在多维状态空间内的随机动态反馈过程。

基于此，本研究构建涵盖时间演进、空间异质性与随机波动的复合解析框架：通过扩展 Lotka-Volterra 方程组追踪种群动力学轨迹，将 Cobb-Douglas 生产函数进行生态拓展，嵌入以 Bellman 方程为核心的随机动态规划架构中，同时引入 GWR 技术弥补空间盲区。

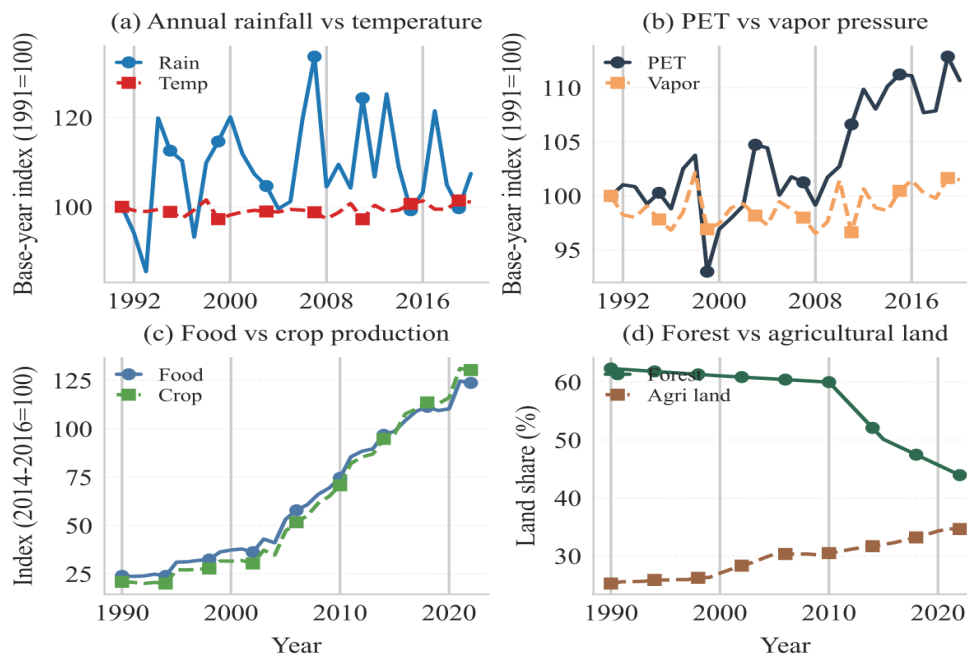


图1 柬埔寨生态系统动态变化趋势 (1990-2022)

1 模型构建

1.1 基础农业食物网动力学模型

设连续时间变量为 t ，定义系统核心状态变量：目标农作物生物量 $C(t)$ 、竞争性杂草生物量 $W(t)$ 、

植食性害虫种群规模 $P(t)$ 。在无化学干预的纯生态状态下，农作物与杂草通过经典竞争型 Lotka-Volterra 方程耦合。令 r_C 、 r_W 为两者最大内禀增长率， K_C 、 K_W 为环境容纳量， α_{CW} 、 $\alpha_{$



WC 为竞争抑制系数， β 为害虫对作物的捕食率， e 为能量转化效率， d_P 为害虫本底死亡率。引入随时间变化的除草剂浓度 $H(t)$ 与杀虫剂浓度 $I(t)$ 后，建立含化学强迫项的非线性方程组：

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= r_c C \left(1 - \frac{C + \alpha_{cw} W}{K_c} \right) - \beta_{cp} C P_e - (\delta_{ch} H + \delta_{ci} I_n) \\ \frac{dW}{dt} &= r_w W \left(1 - \frac{W + \alpha_{wc} C}{K_w} \right) - \delta_{wh} H W \\ \frac{dP_e}{dt} &= \eta_p \beta_{cp} C P_e - m_p P_e - \delta_{pi} I_n P_e \end{aligned}$$

其中 γ_H 、 γ_I 为化学药剂致死系数， δ_H 、 δ_I 为对作物的次生毒害率。在平衡点处构建雅可比矩阵 J ，当化学投入趋零时， J 的特征值实部将由负转正，表明化学依赖型系统本质上属于非稳定耗散结构^[5]。

1.2 次级消费者引入与网络重构

随着边缘栖息地恢复，引入食虫蝙蝠种群 $B(t)$ 与瓢虫种群 $L(t)$ 重构食物网拓扑。蝙蝠具备双重生态功能：作为次级消费者通过捕食压制害虫 (Top-down)，同时作为传粉媒介促进作物繁殖 (Bottom-up)。采用 Holling II 型功能反应函数描述受限捕食行为，设 a 为瞬时捕获率， h 为处理时间常数，则蝙蝠对害虫的实际捕食力为 $aP/(1+ahP)$ 。授粉增益通过协同乘子 μ 引入作物增长项。瓢虫以捕食率 α_{pl} 对害虫施加补充捕食压力。由于杂草动力学不受蝙蝠与瓢虫直接影响， $W(t)$ 仍遵循方程 (2)，重构后新增方程为：

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= r_c C (1 + \varphi_b B) \left(1 - \frac{C + \alpha_{cw} W}{K_c} \right) - \beta_{cp} C P_e \\ \frac{dP_e}{dt} &= \eta_p \beta_{cp} C P_e - m_p P_e - \frac{a_b P_e B}{1 + a_b T_h P_e} - \gamma_{pl} P_e L \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{\eta_b (a_b P_e B)}{1 + a_b T_h P_e} - m_b B - \mu_{bc} E_p B \\ \frac{dL}{dt} &= \eta_l \gamma_{pl} P_e L - m_l L \end{aligned}$$

其中 ε 为蝙蝠能量转化效率， d_B 为自然死亡率， τ_B 为残留农药的生物富集毒性损耗。在设定 $H=I=0$ 的条件下，通过构造候选 Lyapunov 函数 $V(C, W, P, B, L)$ 并结合数值验证，可论证系统在五维相空间中趋向全局渐近稳定点^[6]。

1.3 改进 Cobb-Douglas 生产函数

为评估有机转型的真实经济绩效，对传统 Cobb-Douglas 函数进行生态维度拓展。构造动态生态服务指数 $E(t)$ 表征蝙蝠、瓢虫等有益生物存量与土壤有机质含量的时间积分；定义化学污染惩罚因子 $D(H, I)$ 。拓展后的生产函数为：

$$Y(t) = A_0 e^{\lambda t} K(t)^{\rho_1} L(t)^{\rho_2} E_s(t)^{\rho_3} \Omega(H(t), I_n(t))^{-\rho_4}$$

其中 $A_0 \cdot e^{\lambda t}$ 表征全要素生产率的外生提升， α 、 η 、 γ 为产出弹性系数。该函数揭示：虽短期内增大化学投入可激发产量，但由于非线性惩罚因子 D 的累积迟滞效应，化学投入的边际收益将不可逆地递减，甚至在临界点后塌陷为负值^[7]。

1.4 随机动态规划框架

将连续农业周期离散化，在每一决策阶段 k ，经营者观察当前状态并选择最优有机转换投入比例 u_k 。设系统状态变量集合为 $S_k = (F_k, C_k, W_k, P_k, B_k, L_k, E_k)$ ，随机扰动项 ξ_k 服从含跳跃扩散的概率分布。定义最大化价值函数 $V(S_k)$ 满足核心 Bellman 方程：

$$V_t(X_t) = \max_{u_t \in U} \{ E_{\xi_t} [R(X_t, u_t) + \gamma V_{t+1}(g(X_t, u_t, \xi_t))] \}$$

其中 π 为当期净利润函数， δ 为时间贴现因子， f 为由前述 Lotka-Volterra 系统与 Cobb-Douglas 函数离散化后联合构成的状态转移方程。通过逆向归纳法求解，可推导出全局最优投资路径与化学品戒断时序^[8]。

2 理论分析

2.1 除草剂移除的瞬态响应

当系统处于化学农业稳态时，若令 $H(t)$ 以阶跃函数骤降为零，理论分析表明系统将经历剧烈瞬态振荡。抑制项 $\gamma_H \cdot HW$ 瞬间消失导致杂草生物量 $W(t)$ 以近指数级速率反弹，作物增长率的竞争损耗项绝对值激增。雅可比矩阵的迹 $\text{tr}(J)$ 从负值向正值大幅偏移，标志着局部渐近稳定性丧失。然而从长时间尺度分析，此失稳仅是系统重构的短暂阵痛——除草剂缺席使土壤微生物区系获得复苏空间，提高了基础环境容纳量，为高级营养级物种重新定殖奠定基础^[9]。

2.2 多物种协同控制的全局稳定性

蝙蝠种群耦合至食物链后，Holling II 型功能反应使害虫增长曲率受到严格上限约束。中低密度区间捕食速率近似线性高敏响应，高密度区间



受处理时间 h 的非线性饱和限制，将害虫状态变量锁定在安全区域内。

通过构造候选 Lyapunov 函数 V 并结合放缩法分析：只要蝙蝠具备充分的本底捕食压力， dV/dt 满足非正条件，系统可收敛至唯一全局渐

近稳定点。授粉协同乘子 μ 使作物内禀增长率获得非线性放大，有效对冲杂草竞争性减产。蝙蝠在宏观尺度遏制成虫爆发，瓢虫在微观尺度清理虫卵幼虫，跨尺度互补使系统抗扰动能力显著提升^[10]。

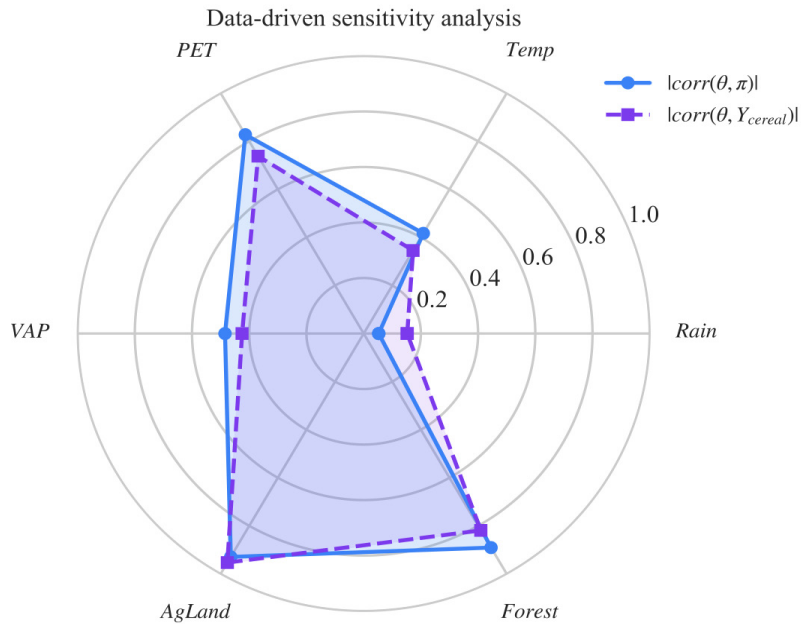


图 2 环境因子对经济产出与农业生产力的敏感性分析

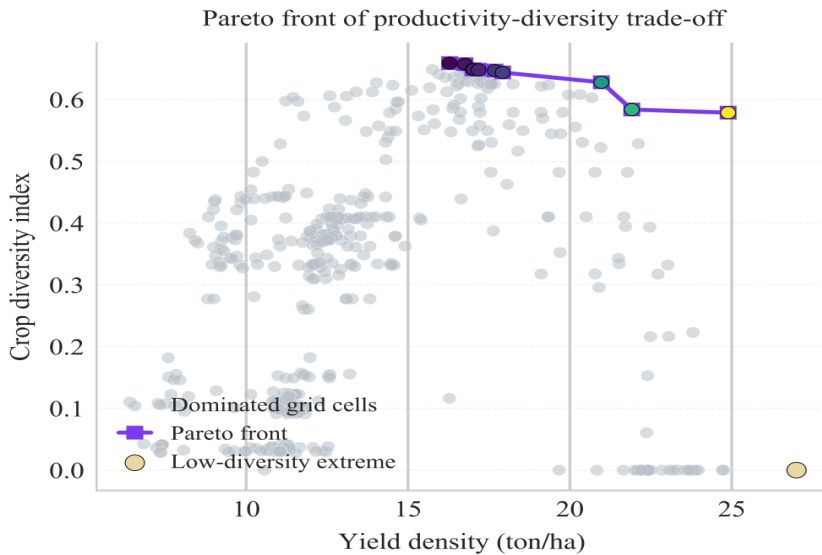


图 3 生产力—多样性权衡的 Pareto 前沿

2.3 有机转型最优控制策略

Bellman 方程求解表明，由于生态资本 $E(t)$ 积累存在时间滞后，转型初期运营成本急剧攀升，

当期利润面临探底风险。但通过逆向归纳法，远期收益得以折现：有机农产品长期价格溢价及化学投入成本的永久削减，经贴现累加后产生巨大

正向折现现金流期望值。随机解的价值 (VSS) 显著为正, 证明将不确定性纳入决策框架能带来额外风险规避利润^[11]。

最优控制律 u^* 揭示转型应为渐进式平滑过渡: (1) 执行分期阶梯式化学品削减, 确保天敌种群恢复曲线安全跨越药剂残留低谷; (2) 以微小成本投资蝙蝠栖息设施与缓冲带, 撬动生态乘子 $E(t)$ 的正反馈效应; (3) 通过碳汇价值核算与绿色金融政策将生态正外部性内部化, 使原本不可行的长期策略翻转为数学期望上的最优解。

3 空间异质性分析

上述时序模型隐含空间同质性假设, 而真实空间中蝙蝠捕食轨迹、害虫迁徙扩散与杂草蔓延均呈现高度空间异质性^[12]。为检验动力学模型稳态解的空间分布特征, 引入地理加权回归 (GWR) 模型, 允许回归系数随空间位置连续变化, 克服 OLS 全局参数恒定的缺陷。

以典型热带农业转型区柬埔寨洞里萨湖 (Tonle Sap) 周边为实证案例, 以水稻产量为因变量, 以除草剂投入、劳动力、降水量与土壤有机质为核心自变量, GWR 能清晰展示人口迁移、渔业衰退与水稻扩张的空间非平稳性^[13]。对比结果如表 1 所示。

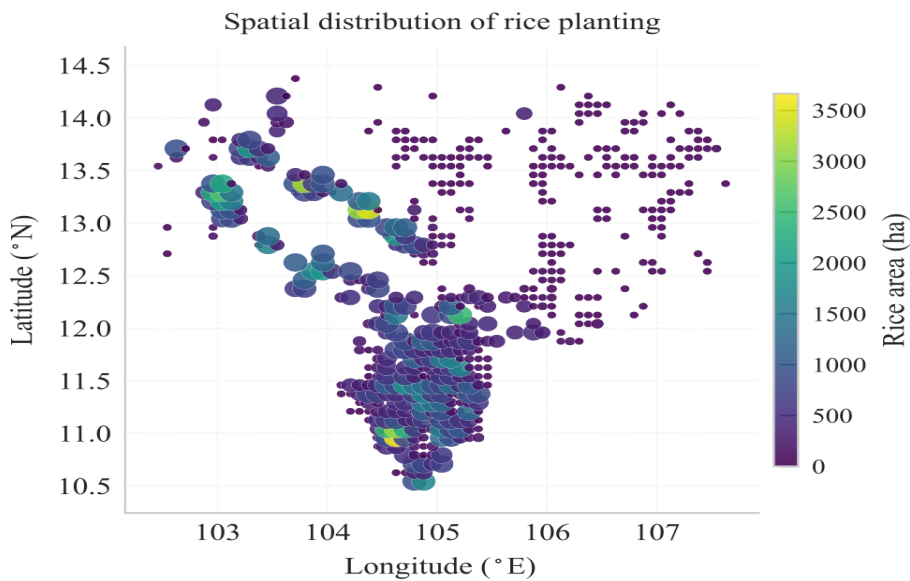


图 4 柬埔寨洞里萨湖区域水稻种植空间分布

表 1 OLS 与 GWR 模型拟合优度对比 (数据来源: 基于文献 [13])

模型	R^2	Adjusted R^2	AIC
OLS	0.412	0.389	1245.6
GWR	0.847	0.831	986.3

GWR 的 R^2 由 0.412 大幅提升至 0.847, AIC 显著降低, 完成了对空间同质性假设的统计证伪。空间回归精准识别出除草剂成本是制约柬埔寨柏威夏省 (Preah Vihear) 农业净产出的最显著负向因子 ($p < 0.01$), 为定点投放生态补偿资金提供了细粒度空间信息 [14]。

4 讨论与结语

本研究构建了融合非线性 Lotka-Volterra 食物

网演化、内生生态资本的 Cobb-Douglas 函数与 Bellman 随机动态最优控制方程的跨学科数学分析架构。理论分析表明: 依赖外源化学药剂的农业形态本质上是不稳定的耗散结构; 通过科学引入蝙蝠、瓢虫等关键物种, 能推动系统自动收敛于具有高拓扑韧性的全局渐近稳定域。Bellman 框架下的多目标随机寻优揭示了转型成本的跨期折现补偿机制, 证实有机转型在数学期望上具有显著



优势。

本研究仍存在局限:(1) Lotka-Volterra 参数设为确定性常数,未来应引入含布朗运动项的随机微分方程体系[15];(2) GWR 强制所有变量共用单一带宽,应迭代为多尺度 GWR (MGWR),允许不同生态变量拥有独立最优带宽;(3) 随机动态规划仍依赖平稳过程假设,面对厚尾分布的极端事件,应引入分布鲁棒优化方法增强策略鲁棒性。

参考文献:

[1] Foley J A, DeFries R, Asner G P, et al. Global consequences of land use [J]. *Science*, 2005, 309 (5734): 570-574.

[2] Tilman D, Cassman K G, Matson P A, et al. Agricultural sustainability and intensive production practices[J]. *Nature*, 2002, 418: 671-677.

[3] Hazell P B R, Norton R D. Mathematical programming for economic analysis in agriculture [M]. Macmillan, 1986.

[4] Brunson C, Fotheringham A S, Charlton M E. Geographically weighted regression [J]. *Geographical Analysis*, 1996, 28 (4): 281-298.

[5] May R M. Stability and complexity in model ecosystems [M]. Princeton University Press, 2001.

[6] Khalil H K. Nonlinear systems [M]. 3rd ed. Prentice Hall, 2002.

[7] Chambers R G. Applied production analysis: a dual approach [M]. Cambridge University Press, 1988.

[8] Bellman R. Dynamic programming [M]. Princeton University Press, 1957.

[9] Pimentel D, Hepperly P, Hanson J, et al. Environmental, Energetic, and Economic Comparisons of Organic and Conventional Farming Systems[J]. *BioScience*, 2005, 55(7): 573-582.

[10] Boyles J G, Cryan P M, McCracken G F, et al. Economic importance of bats in agriculture [J]. *Science*, 2011, 332: 41-42.

[11] Birge J R, Louveaux F. Introduction to stochastic programming [M]. Springer, 2011.

[12] Anselin L. Spatial econometrics: methods and models [M]. Kluwer Academic, 1988.

[13] Arias M E, Cochrane T A, Piman T, et al. Quantifying changes in flooding and habitats in the Tonle Sap Lake (Cambodia) caused by water infrastructure development and climate change in the Mekong Basin [J]. *Journal of Environmental Management*, 2012, 112: 53-66.

[14] Fotheringham A S, Yang W, Kang W. Multiscale GWR (MGWR) [J]. *Annals of the AAG*, 2017, 107 (6): 1247-1265.

[15] Allen E. Modeling with Itô stochastic differential equations [M]. Springer, 2007.

作者简介:赵亮(2005-),男,汉族,重庆铜梁人,喀什大学电子与通信工程学院在读本科生,主要研究方向为电子信息科学与技术;徐温富(2007-),男,汉族,浙江丽水人,喀什大学电子与通信工程学院在读本科生,主要研究方向为通信工程;张彬蕾(1999-),女,汉族,新疆喀什人,博士,喀什大学电子与通信工程学院助教,主要研究方向为信号处理。